Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Online семинары для студентов 2 курса
(201 группа)

# Математический анализ

## Функциональные ряды. Занятие 9

# СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 9

группа 201, Сычугов Д.Ю.



## Домашнее задание к предыдущему семинару:

**2774, в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ — ? $(0\le x<\infty)$ $u_n(x)=\frac{x}{1+n^4x^2}$; так как $u_n(0)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} u_n(x)=0$,

то $\max u_n(x)$ достиг. при $u_n'(x)=0 \Rightarrow u_n'(x)=\frac{(1+n^4x^2)-x\cdot 2n^4x}{(1+n^4x^2)^2}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^4x^2=1 \Rightarrow x_n=\frac{1}{n^2}$, при этом $u_n(x_n)=\frac{\frac{1}{n^2}}{1+1}=\frac{1}{2n^2}$ — член сход. ряда $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса ряд сход, $\rightrightarrows$. **Ответ:** $\rightrightarrows$ на $[0;\infty)$

**2782** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$, $X: 0\le x<\infty$. Возьмем $a_n=\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}=a_n(x)$ — формально т.к. не зависит от $x$.

$b_n(x)=\frac{n}{\sqrt{n(n+x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (задача 2672, решалась нами ранее), так как $a_n$ не зависит от $x$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \rightrightarrows$ на $0\le x<\infty$.

$b_n(x)$ огр. в совокупности, $0<b_n(x)\le 1$, и при $\forall x\in X$, $\{b_n(x)\}\searrow$ по $n$.

$\Rightarrow$ по признаку Абеля ряд $\rightrightarrows$. Абсолютной сход. нет, так как при $\forall x\ge 0$ $|a_n(x)\cdot b_n(x)|\sim\frac{1}{n}$.

**Ответ:** $\rightrightarrows$, абс. сход. нет.

$\boxed{\text{Теория:}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x\in(a,b)$ (1)

## Непрерывность, почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов

**Замечание 1.** В задачнике Демидовича, гл. 5, §4, п. 7 – **ошибка**! (см.

Придумать контрпример, и затем указать, как нужно исправить формулировку, чтобы была правильной.

---

Контрпример: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$ сходится равномерно на каждом $(\alpha,\beta)\subset(0;1)$ и $\exists$ конечные пределы $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^n = A_n = 1$, однако ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ расходится!

---

**Теорема 1 (правильная формулировка)** Если ряд (1) сходится равномерно на $(a,b)$ и $\exists$ конечные пределы $A_n = \lim\limits_{x\to a} u_n(x),\ n=1,2,\dots$, то:

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сход; 2) $\lim\limits_{x\to a}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} u_n(x)\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ (2)

# СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 9



**Теорема 2** Если ряд (1) сход. $\rightrightarrows$ на $[a,b]$ и все $u_n(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то и $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ непр. на $[a,b]$.

**Замечание 2.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$, $u_n(x)\in C[a,b]$. Из теоремы 2 следует, что, если $S(x)$ не является непр. на $[a,b]$, то сход. ряда (1) не может быть равномерной. Удобно для док $\not\rightrightarrows$

**Пример** $\{f_n(x)\}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$, $x\in[0;1]$. Обозначим $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$,

$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1/2, & x=1\end{cases}$ $f(x)$ разрывна на $[0;1]$ $\Rightarrow$ равн. сход. на $[0;1]$ нет!

**Теорема 3** Если все члены ряда (1) непр. диф. на $(a,b)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\rightrightarrows$ на $(a,b)$, а сам ряд (1) сходится хотя бы в одной точке $x_0\in(a,b)$, то:

1) ряд (1) сход. равн. на $(a,b)$;

2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ непр. диф. на $(a,b)$ и $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ **(3)**

**Замечание 3.** Сравните с формулировкой в кн. Демидовича

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 9

стр. 3

**Теорема 4** Если члены ряда (1) непрерывны на $[a, b]$ и ряд(1) сходится $\rightrightarrows$ на $[a,b]$, то $f(x)$ интегр. на $[a,b]$ и верно

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_n(x)\,dx\right) \quad (4)$$

**Замечание 4** Сравните формулировку из кн. Демидовича с формулировкой, приведенной вам на лекциях. Там требование "непрерывность" заменялось на более слабое, "интегрируемость".

$\boxed{2798}$

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \quad (5)$$

Доказать, что сумма ряда (5) имеет производные всех порядков и его можно почленно диф. $\forall$ число раз.

**Доказательство** Докажем сначала на $x \in [\varepsilon, +\infty)$, затем $\varepsilon \to 0$.

$$\left.\begin{array}{l} |u_n(x)| \le e^{-\pi n^2 \varepsilon} \\ |u_n'(x)| \le -n^2 e^{-\pi n^2 \varepsilon} \\ \dots\dots\dots\dots \\ |u_n^{(k)}(x)| \le -n^{2k} e^{-\pi n^2 \varepsilon} \end{array}\right\}$$

– члены сход. рядов, поэтому по признаку Вейерштрасса ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(x) \rightrightarrows$ на $[\varepsilon; +\infty)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ $\Rightarrow$ условия теоремы 3 выполнены, $\theta(x)$ имеет произв. всех порядков и ряд (5) можно почл. диф. $\forall$ число раз; далее $\varepsilon \to 0$.

# СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 9



**2792** Доказать, что функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ (6) непрерывна и имеет непрерывную производную в области $-\infty<x<\infty$.

Док-во 1) $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n^3}$ – непр-на $(-\infty;\infty)$, $|u_n(x)|\le\frac{1}{n^3}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится $\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса ряд (6) $\rightrightarrows$ на $(-\infty;\infty)$

(comment сначала на $[-\pi;\pi]$, затем на $(-\infty;\infty)$) $\Rightarrow$ по теореме 2

$f(x)$ непрерывна на $(-\infty;\infty)$;

2) $u_n'(x)=\frac{\cos nx}{n^2}$, $|u_n'(x)|\le\frac{1}{n^2}\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\rightrightarrows$ на $(-\infty;\infty)\Rightarrow$ далее теорема 3

**2797** $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-x}$, $1<x<\infty$ (7). Доказать, что $\zeta(x)$ непрерывна на $(1;+\infty)$ и имеет произв. всех порядков.

Доказательство 1) $X_\varepsilon=[1+\varepsilon,+\infty)$, $u_n(x)=n^{-x}$. Имеем оценку:

$u_n(x)\le\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$; $u_n'(x)\le\frac{-\ln n}{n^{1+\varepsilon}}$; ... $u_n^{(k)}(x)\le\frac{\ln^k n\cdot(-1)^k}{n^{1+\varepsilon}}$ – члены сход. рядов $\Rightarrow$ по пр. Вейерштр. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(x)\rightrightarrows$ на $X_\varepsilon \xRightarrow{th 3} \exists$ произв. всех порядков $\zeta(x)$; 2) далее $\varepsilon\to 0$.

$\boxed{2802}$ $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, \quad x \in [0;1]$

**а)** При каких $\alpha$ $\{f_n(x)\}$ сходится на $[0;1]$?

Если $x=0$, то $f_n(x)=0$; Если $x \neq 0$, то $f_n(x) \to 0$ при $\forall x>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{f_n(x)\} \to 0$ при всех $\alpha$;

**б)** При каких $\alpha$ $f_n(x) \rightrightarrows 0$ на $[0;1]$? Найдем $\max\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x)|$.

$$f_n'(x) = n^\alpha(e^{-nx} - nxe^{-nx}) = n^\alpha e^{-nx}(1-nx) = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{0\le x\le 1}|f_n(x)| = n^\alpha x e^{-nx}\Big|_{x=\frac{1}{n}} = \frac{n^{\alpha-1}}{e} \to 0 \text{ при } \alpha<1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows 0$ при $\alpha<1$

**в)** При каких $\alpha$ возможен предельный переход под знаком интеграла?

$$I_n = \int_0^1 n^\alpha x e^{-nx}dx = n^\alpha\left(-n^{-1}\int_0^1 x\,d(e^{-nx})\right) = n^\alpha\left(-\frac{1}{n}xe^{-nx}\Big|_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}dx\right) = n^\alpha\left(-\frac{1}{n}e^{-n} - \frac{1}{n^2}\int_0^1 de^{-nx}\right)$$

$$n^\alpha\left(-\frac{1}{n}e^{-n} - e^{-n}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) \to 0 \text{ при } \alpha<2$$

**ВЫВОД:** Условия $f_n(x) \to 0$ недостаточно для возм. предельного перехода под знаком $\int$

**2806** $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{x^n+1}$ (8)  $a_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; $b_n(x) = \frac{x^n}{x^n+1}$; $X = [0;1]$.

формально, на самом деле зависимости от $x$ нет

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows$ на $X$; $\{b_n(x)\}$ ограничена в совокупности, $|b_n(x)| < 1$, и при $\forall x$ монотонна по $n$ $\Rightarrow$ по признаку Абеля ряд (8) $\rightrightarrows$ на $X$;

2) $u_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$; $u_n(x)$ – непрерывны на $X$; далее ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ $\Longrightarrow$ по теореме 2 функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна на $[0;1]$, $\Rightarrow$ $u_n(1) = \lim\limits_{x\to 1-0} u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n}$ $\Longrightarrow$

3) По th 1 (а можно и по th 2) $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \lim\limits_{x\to 1-0} u_n(x) \right) = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} =$

$\boxed{= \frac{1}{2} \ln 2}$ ← Ответ

Comment: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots \Rightarrow$
$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

**На дом:** 2798, 2799, 2803, 2808, 2808.1